Πραγματική Ανάλυση

06-11-17

Ιδιότητες του Εξωτερικού Μέτρου Lebesgue

1) **Μονοτονία**:

Έστω $E, F \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ με $E \subseteq F$. Τότε ισχύει $m^*(E) \leq m^*(F)$

2) **Η σ-υποπροσθετικότητα**

Έστω E_i, $i = 1, 2, \ldots$ υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$. Τότε ισχύει:
$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m^*(E_i)$$

3) Έστω $I \subseteq \mathbb{R}^m$, $I \in \mathcal{L}_n$. Τότε ισχύει: $m^*(I) = V(I)$

* *

Ασκήσεις!

1) Έστω E_i, $i = 1, 2, \ldots n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$ υποσύνολα του $\mathbb{R}^m$. Ν.δ.ο.
$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n_0} m^*(E_i)$$

2) $m^*(\mathbb{R}^m) = +\infty$

3) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^m$, A είναι αριθμήσιμο. Ν.δ.ο. $m^*(A) = 0$

* *

✗ σ-Άλγεβρα

Έστω X να είναι ένα σύνολο. Ένα υποσύνολο $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ ονομάζεται σ-άλγεβρα αν ικανοποιεί τα εξής:

1) $X \in \mathcal{A}$
2) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε και $A^c = X - A \in \mathcal{A}$
3) Έστω A_i, $i = 1, 2, \ldots$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Τότε, $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Διαφορά σ-Άλγεβρας με Άλγεβρα: στην σ-Άλγεβρα έχουμε άπειρη τομή ενώ στην Άλγεβρα πεπερασμένη τομή.

σχόλιο!

SOS

Παρατηρήσεις

1) Μια σ-άλγεβρα είναι και άλγεβρα (<u>άσκηση</u>)
2) Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Έστω, $A_i \in \mathcal{A}$ για $i=1,2,\dots$
Τότε, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (<u>άσκηση</u>. Υπόδειξη με κανόνα De Morgan)

3) Η παρατήρηση 2) παραπάνω μπορεί να αντικαταστήσει το 3) του ορισμού της σ-άλγεβρας (<u>άσκηση</u>)

Παράδειγμα

Έστω X, τυχόν σύνολο. Τότε, το σύνολο $\{\emptyset, X\}$ και το $\mathcal{P}(X)$ είναι σ-άλγεβρες στο X. (<u>άσκηση</u>)

Μέτρα

- Έστω X να είναι ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ να είναι μια άλγεβρα στο X.
Μια (συνολο-)συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ ονομάζεται <u>πεπερασμένα προσθετικό μέτρο</u> αν ικανοποιεί τις εξής 2 ιδιότητες:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n_0} \mu(A_i) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_{n_0})$, για $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 \geq 2$, όπου τα $A_i \in \mathcal{A}$ για $i=1,2,\dots,n_0$, ώστε <u>τα A_i να είναι ξένα ανά δύο</u>

ο ορισμός ισχύει για $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, αλλά ισχύει και για πιο γενικά σύνολα αν χρησιμοποιήσω διαστήματα θα βάλω ότι τα A_i είναι σχεδόν ξένα ανά δύο.

Σχόλιο

- Έστω X να είναι ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ να είναι μια σ-άλγεβρα στο X. Μια (συνολο-)συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ ονομάζεται <u>αριθμήσιμα-προσθετικό</u> ή <u>σ-προσθετικό μέτρο</u> αν ικανοποιεί τις εξής 2 ιδιότητες:

1) $\mu(\emptyset)=0$

2) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i) = \mu(A_1)+\mu(A_2)+\dots+\mu(A_n)+\dots$

για κάθε οικογένεια συνόλων $A_i \in \mathcal{A}$, για $i=1,2,\dots$ ώστε τα A_i, $i=1,2,\dots$ να είναι ξένα ανά δύο.

Παραδείγματα

Έστω X να είναι ένα τυχόν πεπερασμένο σύνολο. Θεωρούμε την συνάρτηση $\mu: \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ με τύπο: $\mu(A)$ = το πλήθος των στοιχείων του A για κάθε $A \subseteq X$. Δείξτε ότι το μ είναι μέτρο. (άσκηση)

Παρατήρηση. Ένα σ-προσθετικό μέτρο είναι και πεπερασμένα προσθετικό μέτρο (άσκηση)

- Έστω X να είναι ένα σύνολο, $\mathcal{A}$ να είναι μια σ-άλγεβρα στο X και $\mu_1, \mu_2: \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ να είναι σ-προσθετικά μέτρα.
Ορίζουμε την (συνολο-)συνάρτηση $\mu_1+\mu_2: \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ με τύπο: $\boxed{(\mu_1+\mu_2)(A) = \mu_1(A)+\mu_2(A)}$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

Άσκηση: Δείξτε ότι $\mu_1+\mu_2$ είναι σ-προσθετικό μέτρο.

- Έστω $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Ορίζουμε την (συνολο-)συνάρτηση $a\mu_1: \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ με τύπο: $\boxed{(a\mu_1)(A) = a\mu_1(A)}$ $\forall A \in \mathcal{A}$

Άσκηση: Δείξτε ότι η $a\mu_1$ είναι σ-προσθετικό-μέτρο.

Ορισμός: Έστω X να είναι ένα σύνολο, $\mathcal{A}$ να είναι μια σ-άλγεβρα στο X και $\mu: \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ να είναι ένα σ-προσθετικό μέτρο. Ένα σύνολο $A \subseteq X$ ονομάζεται μ-μηδενικό, αν $\exists B \in \mathcal{A}$ τω $A \subseteq B$ και $\mu(B)=0$

Ορισμός Το μέτρο μ ονομάζεται πλήρες αν κάθε μ-μηδενικό σύνολο $A \subseteq X$ ανήκει στο λ.

ορισμός Εξωτερικό μέτρο

Έστω X να είναι ένα σύνολο. Μια (συνολο-) συνάρτηση $\phi: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty)$ ονομάζεται εξωτερικό μέτρο αν ικανοποιεί τα εξής:

1) $\phi(\emptyset) = 0$
2) $\phi(A) \leq \phi(B)$ για κάθε δύο σύνολα $A, B \subseteq X$ με $A \subseteq B$.
3) Για κάθε ακολουθία συνόλων $A_i \subseteq X$, για $i = 1, 2, ..$ να ισχύει:

$$\phi\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \phi(A_i)$$

αν έχω μια ακολουθία $a_i \geq 0$ $i = 1, 2, ...$ τότε ορίζεται $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$

Σχόλιο

Παραδείγματα

Έστω X να είναι ένα σύνολο. Ορίζουμε $\phi_1: \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ ως εξής:

$$\phi_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset \\ 1, & \text{αν } A \neq \emptyset \end{cases}$$

$\phi_2: \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ ως εξής:

$$\phi_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ 1, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases}$$

Τότε, τα ϕ_1, ϕ_2 είναι εξωτερικό μέτρο.

Πρόταση Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue $m^*: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ είναι πράγματι ένα εξωτερικό μέτρο. (χωρίς απόδειξη)

ορισμός Έστω X να είναι ένα σύνολο $\phi: P(X) \to [0, +\infty)$ να είναι ένα εξωτερικό μέτρο. Ένα σύνολο $B \subseteq X$ ονομάζεται **φ-μετρήσιμο**, εάν ισχύει
$\phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(A \setminus B)$, για κάθε $A \subseteq X$
Η οικογένεια των φ-μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με M_ϕ. Δηλαδή
$M_\phi = \{A \in P(X) \mid A$ είναι φ-μετρήσιμο$\}$

KARAṢOṢARA!

Θεώρημα Καραθεοδωρή

Έστω X να είναι ένα σύνολο και $\phi: P(X) \to [0, +\infty)$ να είναι ένα εξωτερικό μέτρο στο X. Τότε, η οικογένεια M_ϕ είναι μια σ-άλγεβρα στο X και ο περιορισμός $\phi|M_\phi : M_\phi \to [0, +\infty]$ είναι ένα πλήρες μέτρο.

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 5x$
ο περιορισμός $g = f|[0,1]$ είναι η συνάρτηση $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 5x$

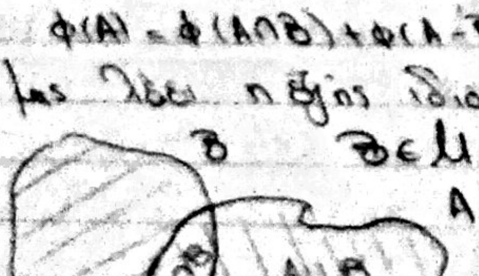
Υπενθύμιση!

το M_ϕ περιγράφει όλα τα "καλά" σύνολα για τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε μήκος, εμβαδόν, όγκο.

Σχόλιο

Τα "καλά" σύνολα είναι τα σύνολα που έχουν την εξής ιδιότητα:
$\phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(A - B)$
Τι μας λέει η εξής ιδιότητα:

$B \in M_{m^*}$, A τυχόν σύνολο



$m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B) = m^*(A)$ Τότε η ιδιότητα ισχύει
Αν $B \notin M_{m^*}$ δεν μπορώ να εφαρμόσω την εξής εκφρασμένη ιδιότητα
Μας λέει ότι ο περιορισμός $m^* | M_{m^*} \to [0, +\infty]$ είναι μέτρο, πλήρες
μπορώ να υπολογίσω εμβαδόν στον $\mathbb{R}^2$, μήκος στον $\mathbb{R}^1$ και όγκος στον $\mathbb{R}^3$

Σχόλιο!

στον χώρο $\mathbb{R}^n$.

ορισμός: Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$. Ορίζουμε σαν n_0-διάστατο μέτρο Lebesgue το περιορισμό $m^* | \mathcal{M}_{m^*}$ του εξωτερικού μέτρου Lebesgue m^* πάνω στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_{m^*}$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα Καραθεοδωρή. Το συμβολίζουμε με m.

Δηλαδή, $m :\underset{\text{ορ}}{=} m^* | \mathcal{M}_{m^*} : \mathcal{M}_{m^*} \to [0, +\infty]$

Άρα, το m είναι προφανώς ένα πλήρες μέτρο.

πρόταση: Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$. Τα διαστήματα $I \in \mathcal{I}^{n_0}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα σύνολα. Επίσης, τα ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ είναι Lebesgue μετρήσιμα σύνολα. (χωρίς απόδειξη)

ορίζουμε την σ-άλγεβρα για να περιγράψουμε σύνολα, με τα οποία θέλω να υπολογίσω εμβαδόν, μήκος, όγκο. και να πάρω μια οικογένεια συνόλων από την σ-άλγεβρα, η τομή, τα συμπληρώματα τους, η ένωση τους θα πέσει πάντα μέσα στην σ-άλγεβρα.

Σχόλιο ?

Ιδιότητες μέτρων

1) Μονοτονία

Έστω X να είναι ένα σύνολο, $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X και $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ να είναι ένα προσθετικό μέτρο. Έστω $A, B \in \mathcal{A}$ ώστε $A \subseteq B$. Τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$.
Αν $\mu(A) < +\infty$, τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

αντιπαράδειγμα

το μικρό δεν είναι υποσύνολο του μεγάλου, "πέφτει" λίγο έξω.

Απόδειξη: Προφανώς ισχύει.
$B = A \cup (B \setminus A)$ και τα A, $B \setminus A$ είναι ξένα. Επειδή, $A, B \in \mathcal{A}$ έπεται ότι $B \setminus A \in \mathcal{A}$. Το μ σαν σ-προσθετικό μέτρο είναι και πεπερασμένο προσθετικό μέτρο. Άρα, από την ιδιότητα 2) του πεπερασμένου προσθετικού μέτρου έπεται ότι:

Παρατήρηση

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \quad (1)$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

1) Αν $\mu(B) = +\infty$, το αποτέλεσμα είναι προφανές.

2) Αν $\mu(B) < +\infty$, αφού το μέτρο μ παίρνει τιμές στο $[0, +\infty)$ και από την σχέση (1), έπεται ότι: $\mu(A) < +\infty$ και $\mu(B \setminus A) < +\infty$.
Αφού, $\mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$ (2), γιατί $\mu(B \setminus A) \geq 0$ έπεται ότι από τις σχέσεις (1), (2) $\mu(B) \geq \mu(A)$.

$\square$